Trabajo Práctico Nro. 8

Transformada de Fourier

Nomenclatura:

$\mathbb{1}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [a,b] \\ 0 & \text{si } t \notin [a,b] \end{cases}$, función característica del intervalo $[a,b]$.

$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$, función de Heaviside.

1. Para $a > 0$:
   (a) Probar que $\mathbb{1}_{[-a,a]}(t) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(\frac{t}{a}) = H(t+a) - H(t-a)$.
   (b) Calcular $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-1,1]}(t))$ y $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-a,a]}(t))$.

2. Verificar que cada una de las siguientes funciones es absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ y obtener su transformada de Fourier. $(a > 0)$
   (a) $f(t) = \begin{cases} |t| & \text{si } |t| \leqslant a \\ 0 & \text{si } |t| > a \end{cases}$
   (b) $f(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{a} & \text{si } |t| \leqslant a \\ 0 & \text{si } |t| > a \end{cases}$
   (c) $f(t) = e^{-a|t|}$
   (d) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-at} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
   (e) $f(t) = te^{-a|t|}$
   (f) $f(t) = |t|e^{-a|t|}$
   (g) $f(t) = e^{-a\,t^2}$
   (h) $f(t) = \dfrac{1}{a^2 + t^2}$
   (i) $f(t) = \dfrac{t}{a^2 + t^2}$
   (j) $f(t) = \dfrac{5e^{3it}}{t^2 - 4t + 13}$
   (k) $\cos(2t)[H(t+1) - H(t-1)]$
   (l) $f(t) = H(t-3)(t-3)e^{-4t}$

3. A partir de $\mathcal{F}(e^{-t^2})$ y, siendo a, b, c números reales positivos, hallar:
   (a) $\mathcal{F}(e^{-a(t-b)^2})$, (b) $\mathcal{F}(te^{-a(t-b)^2})$, (c) $\mathcal{F}(\cos(c\,t)e^{-t^2})$, (d) $\mathcal{F}(\operatorname{sen}(c\,t)e^{-t^2})$.

4. Analizar la existencia de la transformada de Fourier de $f(t) = \dfrac{1}{t}$ y en caso afirmativo, calcularla.

5. Obtener el valor de cada una de las siguientes integrales impropias, a partir de la transformada de Fourier de una función adecuada:
   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Probar que:

   (a) $\overline{\mathcal{F}(f)}(w) = \mathcal{F}(f)(-w)$.

   (b) si $f(x)$ es una función par, entonces $\mathcal{F}(f)(w)$ es real para todo w real y es una función par.

   (c) si $f(x)$ es una función impar, $i\mathcal{F}(f)(w)$ es real para todo w real y es una función impar.

7. (a) Probar que si $f(x)$ es derivable y absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ y además $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ entonces

   $$\mathcal{F}[f'](w) = iw\mathcal{F}[f](w)$$

   Observar que bajo las condiciones anteriores, no se requiere que $f'(x)$ sea absolutamente integrable. Ejemplo: $f(x) = e^{-x^2} \operatorname{sen}(e^x)$.

   (b) Sea f continua a trozos y absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ tal que $\hat{f}(0) = 0$. Mostrar que:

   $$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(s)ds\right](w) = \frac{1}{iw}\hat{f}(w)$$

8. Hallar la transformada inversa de Fourier de cada una de las siguientes funciones.

   (a) $F(w) = \dfrac{6e^{4iw} \operatorname{sen}(2w)}{9 + w^2}$ (b) $F(w) = e^{-3|w+4|} \cos(2w + 8)$ (c) $F(w) = e^{-\frac{w^2}{9}} \operatorname{sen}(8w)$

9. Calcular la transformada de Fourier de:

   (a) $f(t) = \dfrac{t}{(a^2 + t^2)^2}$ (b) $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen}(a\,t)}{a\,t}$ $t \neq 0$ $(a \in \mathbb{R})$

   i) aplicando residuos, ii) mediante fórmula de inversión.

10. Para las funciones f de (a), (f) y (g) del ejercicio 2, analizar cómo se relacionan $f(t)$, $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwt}dw$ y $\lim\limits_{M \to \infty} \int_{-M}^{M} \hat{f}(w)e^{iwt}dw$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

11. Calcular $\left(\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} * \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\right)(t)$ y su transformada de Fourier.

12. Probar la existencia y calcular la transformada inversa de Fourier de

   (a) $F(w) = \dfrac{1}{(1 + w^2)^2}$ (b) $F(w) = \dfrac{1}{(1 + iw)^2}$

   (c) $F(w) = \dfrac{1}{(1 + iw)(2 + iw)}$ (d) $F(w) = \dfrac{\operatorname{sen}(3w)}{w(2 + iw)}$

   (Sugerencia: utilizar el teorema de convolución).

13. Mostrar que bajo hipótesis adecuadas (¿cuáles?):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}\; dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w)\overline{\hat{g}(w)}\; dw$$

y calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\operatorname{sen}\alpha w)(\operatorname{sen}\beta w)}{w^2} dw.$

14. Calcular, por medio de la identidad de Parseval, el valor de:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\; dt$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1-e^{iwt}}{iw}\right|^2 dt$

15. Hallar las transformadas seno y coseno de cada una de las siguientes funciones $(a>0)$

(a) $f(t)=e^{-a\,t}H(t)$

(b) $f(t)=t\,e^{-t}H(t)$

(c) $f(t)=e^{-t}(\cos t)H(t)$

(d) $f(t)=\begin{cases} \cos t & \text{si } 0\leqslant t\leqslant a \\ 0 & \text{si } t>a \end{cases}$

(e) $f(t)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0\leqslant t<a \\ -1 & \text{si } a\leqslant t<2a \\ 0 & \text{si } t\geqslant 2a \end{cases}$

(f) $f(t)=\begin{cases} \operatorname{senh} t & \text{si } a\leqslant t<2a \\ 0 & \text{si } 0\leqslant t<a \text{ y } t\geqslant 2a \end{cases}$

16. Probar que bajo condiciones apropiadas (¿cuáles?) de f y de sus derivadas vale:

(a) $\mathcal{F}_s[f^{(4)}(t)](w) = w^4\hat{f}_s(w) - w^3 f(0) + w f''(0)$

(b) $\mathcal{F}_c[f^{(4)}(t)](w) = w^4\hat{f}_c(w) + w^2 f'(0) - f^{(3)}(0)$

17. Establecer bajo qué hipótesis se cumple:

(a) $f(t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \hat{f}_s(w)\operatorname{sen}(wt)dw$ (b) $f(t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \hat{f}_c(w)\cos(wt)dw$

18. Hallar la solución del problema de la conducción del calor en una varilla infinita:

$$\begin{cases} u_{xx}=u_t & -\infty<x<+\infty, \quad t>0 \\ u(x,0)=e^{-x^2} & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

19. Resolver:

$$\begin{cases} u_{xx}-u_t-0.49\,t\,u=0 & -\infty<x<+\infty, \quad 0<t<+\infty \\ u(x,0)=e^{-4x^2} & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

20. Hallar la solución del problema de distribución de temperatura en el semiplano:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & -\infty<x<+\infty, \quad 0<y<+\infty \\ u(x,0)=\dfrac{1}{x^2+4} & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

21. Resolver el problema del potencial electrostático en la banda infinita:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & -\infty<x<+\infty, \quad 0<y<1 \\ u(x,0)=e^{-2|x|} & -\infty<x<+\infty \\ u(x,1)=0 & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

22. Resolver el problema de la onda en la cuerda infinita:

$$\begin{cases} u_{tt}=9u_{xx} & -\infty<x<+\infty, \quad t>0 \\ u(x,0)=xe^{-|x|} & -\infty<x<+\infty \\ u_t(x,0)=\begin{cases} e^x & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \end{cases}$$

¿Se puede resolver mediante el método de D'Alembert? (confrontar con el ejercicio 4 del Trabajo Práctico Nro. 6).

23. Hallar la solución del problema de la conducción del calor en una varilla semi-infinita:

$$\begin{cases} u_{xx}=u_t & 0<x<+\infty, \quad t>0 \\ u(0,t)=0 & t\geqslant 0 \\ u(x,0)=\begin{cases} 1 & 0\leqslant x\leqslant h \\ 0 & x>h \end{cases} \end{cases}$$

24. Resolver:

$$\begin{cases} u_{xx}=u_t+u & 0<x<+\infty, \quad t>0 \\ u(x,0)=0 & x>0 \\ u_x(0,t)=f(t) & t\geqslant 0 \end{cases}$$

25. Resolver el problema de la onda en la cuerda semi-infinita:

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx} & 0<x<+\infty, \quad t>0 \\ u(0,t)=0 & t\geqslant 0 \\ u(x,0)=\begin{cases} (x-5)^2 & 0\leqslant x\leqslant 5 \\ 0 & x>5 \end{cases} \\ u_t(x,0)=\begin{cases} 4x^2 & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ 0 & x>2 \end{cases} \end{cases}$$